Fiche : intégrales

Définition :

Si la fonction *f* est continue sur I , le réel *F(b) – F(a)* est indépendante de la primitive *F* de *f* choisie. On l'appelle l'intégrale de *f* prise entre les valeurs *a* et *b* et on la note $\int_a^b f(x)dx$ qui se lit *" Somme de a à b de f(x)dx ".*

Notation : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque : $\int_a^b dx = b - a$ et $\int_a^b k\,dx = b - a$, k réel constant.

Propriétés :

1. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a, b et c et si k est un réel constant alors :

$\int_a^a f(x)dx = 0$ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.

Si → et ↓	Pour tout x de I, $f(x) \geq 0$	Pour tout x de I, $f(x) \leq 0$
$a \leq b$	$\int_a^b f(x)dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)dx \leq 0$
$a \geq b$	$\int_a^b f(x)dx \leq 0$	$\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.

Si → et ↓	Pour tout x de I, $f(x) \leq g(x)$	Pour tout x de I, $f(x) \geq g(x)$
$a \leq b$	$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.

Si $a \leq b$ et pour tout x de $[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Si $a \leq b$ et pour tout x de $[a,b]$, $|f(x)| \leq k$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k\,|b-a|$

Fiche : intégrales

Valeur moyenne d'une fonction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, avec a < b , alors on appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ le réel $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Intégration par parties :

Si u et v sont dérivables sur $[a;b]$ alors $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

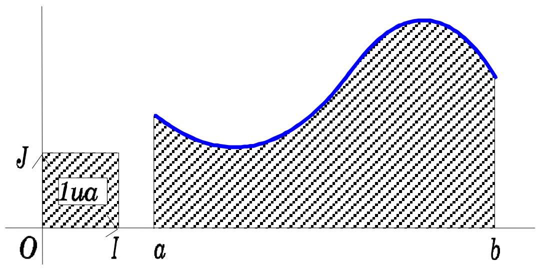
Calcul d'aires :

Unité d'aires

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
L'unité d'aire sera $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments [*OI*] et [*OJ*] .

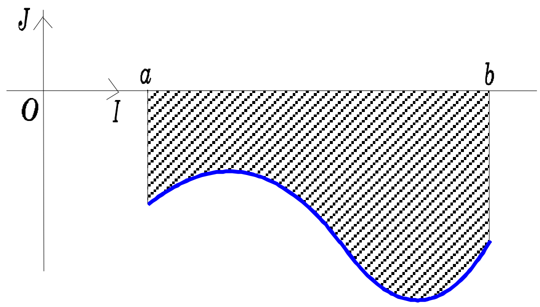
Théorème 1 :

Soit *f* une fonction continue et positive sur l'intervalle [*a, b*] . L'aire, en ua, de la partie ($\mathscr{D}$) du plan limitée par la courbe (C) de f et les droites d'équations respectives x = a, x = b et l'axes des abscisses est $\mathscr{A} = \int_a^b f(x).dx$



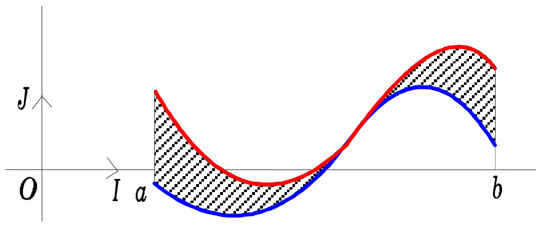
Théorème 2 :

Soit *f* une fonction continue et négative sur l'intervalle [*a, b*]. L'aire, en ua, de la partie et ($\mathscr{D}$) du plan limitée par la courbe (C) de f et les droites d'équations respectives x = a, x = b et l'axes des abscisses est $\mathscr{A} = -\int_a^b f(x).dx$



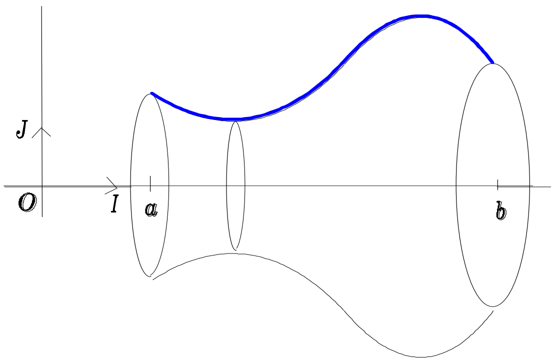
Théorème 3 :

Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur l'intervalle [*a, b*]. L'aire, en ua, de la partie ($\mathscr{D}$) du plan limitée par la courbe (C) de f , la courbe (C') de g et les droites d'équations respectives x = a et x = b est $\mathscr{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$.



Fiche : intégrales

Calcul de volume :



L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

L'unité de volume sera $OI \times OJ \times OK$, volume du parallélépipède ayant pour côtés les segments [*OI*], [*OJ*] et [*OK*] .

Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de **l'axe des abscisses** d'un domaine limité par une courbe y = f(x).

Théorème :

Si f une fonction continue et positive sur l'intervalle [*a*, *b*] et (S) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors le volume, en uv, engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par le domaine (S) est $V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

